

Argomenti dell'elaborato di cui art. 18 dell'OM 53 del 03 marzo 2021, assegnati agli studenti della 5^aA del Liceo Scientifico (LI02) "Pitagora" di Isili (SU), anno scolastico 2020-21.

1. Di seguito gli argomenti che dovranno essere sviluppati nell'elaborato.

- **Fisica**

Il candidato descriva i principi fisici sui quali si basa il fenomeno noto come "potere delle punte" quindi ne descriva dettagliatamente il modello semplificato formato da due sfere conduttrici, di raggio differente, in equilibrio elettrostatico.

- **Matematica**

Data la funzione

$$f(x) = \frac{ax + 1}{x^2 + b}.$$

- a) Determina a e b sapendo che i punti $A(0, 1)$ e $B(1, 0)$ appartengono al grafico G_f di $f(x)$, quindi studia la funzione e disegnane il grafico.
- b) Considera la retta r passante per i punti A e B e determina l'area della superficie compresa tra il grafico della retta r e G_f .
- c) Determina le coordinate del punto P appartenente a G_f nel 1° quadrante e tale che sia un vertice del triangolo rettangolo di area massima di base sull'asse delle x e altro vertice nell'origine degli assi.

Per quanto possibile, utilizza Geogebra per la verifica grafica di quanto ottenuto.

2. Di seguito gli argomenti che dovranno essere sviluppati nell'elaborato.

- **Fisica** Un nucleo che subisce un decadimento radioattivo generalmente genera delle particelle cariche che possono essere analizzate, nella loro "carica specifica" $\frac{q}{m}$ attraverso uno strumento noto come "spettrometro di massa". Il candidato descriva approfonditamente i principi fisici sui quali si basa il funzionamento di tale strumento.

- **Matematica**

La Medicina Nucleare è un settore della Medicina che fa uso di farmaci ai quali sono stati legati dei radionuclidi (isotopi radiattivi di elementi stabili). Questi composti vengono chiamati radiofarmaci e vengono somministrati al paziente per finalità diagnostiche o terapeutiche. Viene ad esempio utilizzato un elemento radioattivo, il tecnezio, ottenuto dal decadimento del molibdeno. In un campione contenente molibdeno il numero di atomi di molibdeno radioattivo varia nel tempo secondo la legge:

$$N_1(t) = N_0 e^{-\lambda_1 t},$$

dove N_0 è la quantità di atomi di molibdeno al momento della creazione del campione radioattivo e λ_1 è la costante di decadimento del molibdeno.

- a) Sapendo che un campione di molibdeno contiene 644 atomi quando sono passate 44 h dalla sua creazione, che diventano 357 dopo che sono passate ulteriori 59 h, determina il numero iniziale di atomi di molibdeno e la costante di decadimento λ_1 .

- b) Il tecnezio ottenuto decade a sua volta, per cui il numero di atomi di tecnezio utilizzabili segue nel tempo l'andamento della seguente funzione:

$$N_2(t) = N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \quad \text{con } t > 0.$$

Sapendo che $\lambda_2 = 0,1 \text{ h}^{-1}$ studia questa funzione e tracciane il grafico G_N , indicando in particolare dopo quanto tempo si ha il massimo numero di atomi di tecnezio utilizzabili e quanti questi siano.

- c) Sia Γ_N il trapezoide individuato dalla superficie compresa tra G_N e l'asse delle t , sempre per $t > 0$; calcolane l'area della superficie.
- d) Determina le coordinate del punto P appartenente a Γ_N e tale che sia vertice del rettangolo di area massima di base l'asse delle t .

3. Di seguito gli argomenti che dovranno essere sviluppati nell'elaborato.

• **Fisica**

Il candidato descriva dettagliatamente i principi fisici sui quali si basa il funzionamento del treno a levitazione magnetica.

• **Matematica**

Sia $f(x)$ la funzione primitiva di $g(x) = -x \cdot e^{-x}$ ed avente un asintoto orizzontale di equazione $x = 5$.

- a) Studia la funzione $f(x)$ e dimostra che la funzione possiede un unico punto di massimo e un unico punto di flesso, quindi disegna il grafico G_f della funzione.
- b) Sia Γ_f il trapezoide individuato dalla superficie compresa tra G_f e l'asse delle x per $0 \leq x \leq \infty$; calcola l'area di Γ_f ed il volume del solido di rotazione ottenuto facendo ruotare Γ_f intorno all'asse x .
- c) Determina le coordinate del punto P appartenente a Γ_f nel 1° quadrante e tale che sia vertice del rettangolo di area massima di base l'asse delle x .

Per quanto possibile, utilizza Geogebra per la verifica grafica di quanto ottenuto.

4. Di seguito gli argomenti che dovranno essere sviluppati nell'elaborato.

• **Fisica**

La risonanza magnetica nucleare (RMN) è una tecnica di indagine sulla materia, ampiamente applicata anche alla medicina. Si basa sull'utilizzo di solenoidi generanti campi magnetici di qualche tesla e sul fatto che alcuni nuclei atomici costituenti la materia si comportano come se fossero spire percorse da correnti estremamente deboli (ed altri fenomeni che esulano questa trattazione). Il candidato descriva dettagliatamente i principi fisici dei fenomeni attesi quando delle spire attraversate da corrente vengono introdotte in un solenoide, anch'esso attraversato da corrente.

• **Matematica**

Sia f_a la famiglia di funzioni definita da $f_a(x) = (ax - 1) \cdot e^{ax}$ con $a \in \mathbb{R} - \{0\}$.

- a) Della famiglia f_a , studia la funzione $f(x)$ che ha un flesso per $x = -1/5$, dimostra che la funzione possiede un unico punto di minimo e un unico punto di flesso, quindi disegna il grafico G_f della funzione.
- b) Sia Γ_f il trapezoide individuato dalla superficie compresa tra G_f nella parte del grafico per cui $f(x) \leq 0$, e l'asse delle x ; calcola l'area di Γ_f ed il volume del solido di rotazione ottenuto facendo ruotare Γ_f intorno all'asse x .

- c) Determina le coordinate del punto P appartenente a Γ_f nel 3° quadrante e tale che sia vertice del rettangolo di area massima di base l'asse delle x .

Per quanto possibile, utilizza Geogebra per la verifica grafica di quanto ottenuto.

5. Di seguito gli argomenti che dovranno essere sviluppati nell'elaborato.

• **Fisica**

Al museo di Fisica del Dipartimento di Fisica di Cagliari è conservata una delle tre "Dinamo di Pacinotti" esistenti al mondo, costruita proprio dal grande scienziato italiano negli anni di insegnamento presso l'Università di Cagliari. Il candidato descriva dettagliatamente i principi fisici sui quali si basa il funzionamento delle dinamo.

• **Matematica**

Sia data la funzione:

$$f(x) = (ax^2 + bx)e^{-\frac{x}{c}} + d.$$

$f(x)$ può descrivere l'andamento della legge della velocità di un oggetto $v(x) = f(x)$ con $x \geq 0$ esprime il tempo (in secondi).

- a) Determina le unità di misura di a, b, c, d ed il valore assoluto di a e d sapendo che la velocità al tempo zero è 1 m/s, che l'oggetto raggiunge la velocità massima quando $x = \sqrt{2}$ e che in valore assoluto $b = 2$ e $c = 1$.
- b) Studia la funzione così ottenuta, dimostra che la funzione possiede un unico punto di massimo ed un unico punto di flesso per $x \geq 0$, quindi disegna il grafico G_f della funzione in tutto il suo dominio naturale.
- c) Trova l'equazione della legge oraria $s(x)$ considerando uno spostamento di 3 m al tempo zero.
- d) Sia Γ_f il trapezoide individuato dalla superficie compresa tra G_f e l'asse delle x per $0 \leq x \leq 4$; calcolane l'area della superficie ed il volume di rotazione intorno all'asse x .
- e) Determina le coordinate del punto P appartenente a Γ_f e tale che sia vertice del rettangolo di area massima di base l'asse delle x .

Per quanto possibile, utilizza Geogebra per la verifica grafica di quanto ottenuto.

6. Di seguito gli argomenti che dovranno essere sviluppati nell'elaborato.

• **Fisica**

Il candidato descriva dettagliatamente i principi fisici coi quali si spiega l'esistenza delle aurore polari.

• **Matematica**

Sia data la funzione:

$$f(x) = ax \cdot e^{-bx} \quad \text{con } a, b > 0.$$

$f(x)$ può essere utilizzata per descrivere l'andamento della concentrazione nel sangue (in mg/l) di un farmaco somministrato per via orale ad un paziente, nelle prime cento ore a partire dall'istante $x = 0$ in cui il farmaco viene somministrato, con x il tempo trascorso (in ore).

- a) Determina i valori di a e di b , sapendo che la massima concentrazione del farmaco nel sangue del paziente, uguale a 6 mg/l, viene raggiunta dopo esattamente due ore dall'assunzione.

- b) Studia la funzione così ottenuta, dimostra che la funzione possiede un unico punto di massimo ed un unico punto di flesso, quindi disegna il grafico G_f della funzione in tutto il suo dominio naturale, mettendo in evidenza il tratto relativo al problema, cioè quello per $0 \leq x \leq 100$.
- c) Determina dopo quanto tempo dal massimo della concentrazione la concentrazione del farmaco diventa rispettivamente il 50% e l'1% di tale valore massimo.
- d) Sia Γ_f il trapezoide individuato dalla superficie compresa tra G_f e l'asse delle x per $0 \leq x \leq 60$; calcola il volume del solido di rotazione ottenuto facendo ruotare Γ_f intorno all'asse x .
- e) Determina le coordinate del punto P appartenente a Γ_f nel 1° quadrante e tale che sia vertice del rettangolo di area massima di base l'asse delle x .

Per quanto possibile, utilizza Geogebra per la verifica grafica di quanto ottenuto.

7. Di seguito gli argomenti che dovranno essere sviluppati nell'elaborato.

- **Fisica** Dopo aver introdotto il Teorema di Gauss nella sua applicazione al campo elettrico, il candidato ne mostri l'immediatezza di utilizzo nel calcolare il campo elettrico generato da particolari distribuzioni simmetriche di carica elettrica.

- **Matematica**

Sia f_a la famiglia di funzioni definita da $f_a(x) = \frac{x}{a} \cdot e^{-\left(\frac{x}{a}-a\right)}$.

- a) Della famiglia f_a studia la funzione $f(x)$ che ha un flesso per $x = 10$, dimostra che la funzione possiede un unico punto di minimo e un unico punto di flesso, quindi disegna il grafico G_f della funzione.
- b) Determina le coordinate del punto P appartenente a G_f nel 1° quadrante e tale che sia un vertice del triangolo rettangolo di area massima di base sull'asse delle x e altro vertice nell'origine degli assi.
- c) Considera la funzione $g(x) = 20 \cdot f(x)$ ed ipotizziamo che possa essere utilizzata per modellizzare la velocità con cui aumenta il peso di un capretto appena nato, con $x \geq 0$ a rappresentare il tempo in mesi dalla nascita del cucciolo e $g(x)$ misurata in grammi al mese. Se un capretto alla nascita dovesse pesare 3 kg, quanto peserebbe a 10 mesi, a 3 anni ed a 5 anni?

Per quanto possibile, utilizza Geogebra per la verifica grafica di quanto ottenuto.

8. Di seguito gli argomenti che dovranno essere sviluppati nell'elaborato.

- **Fisica**

Il concetto di "potenziale" associato ad una forza conservativa semplifica notevolmente la trattazione anche quantitativa di fenomeni fisici associati a tale forza. Il candidato esponga il concetto di potenziale elettrico enfatizzandone la simmetria con il potenziale gravitazionale e le semplificazioni che tale concetto porta nella trattazione dei fenomeni elettrici.

- **Matematica**

Data la funzione

$$f(x) = \frac{ax^3 + 6x^2 + b}{cx^2}, \quad \text{con } a, b, c \neq 0 :$$

- a) determina a , b , c in modo che il punto $A(-2, 0)$ sia di massimo relativo e la retta $r : 2x - 3y + 6 = 0$ sia asintoto obliquo, quindi studia la funzione e disegna il grafico.

- b) Calcola l'area della regione finita di piano $\Gamma_{[1;4]}$ delimitata dal grafico G_f di f , dall'asse delle ascisse e dalla retta di equazione $s : x - 4 = 0$.
- c) Nella stessa regione di piano $\Gamma_{[1;4]}$ determina le coordinate del punto P appartenente a G_f tale che sia un vertice del triangolo rettangolo di area massima di base sull'asse delle x e altro vertice in $B(4, 0)$.

Per quanto possibile, utilizza Geogebra per la verifica grafica di quanto ottenuto.

9. Di seguito gli argomenti che dovranno essere sviluppati nell'elaborato.

• **Fisica**

Il candidato descriva dettagliatamente i principi fisici sui quali si basa il funzionamento delle memorie magnetiche digitali.

• **Matematica**

Un punto materiale si muove lungo l'asse x sotto l'azione di una forza \vec{F} che dipende dalla posizione del punto secondo la legge

$$F(x) = ax \cdot e^{-\frac{x^2}{b^2}}$$

- a) Coerentemente con la grandezza fisica considerata, determina le unità di misura di a e b ed il loro valore sapendo che la forza è massima quando $x = 5/\sqrt{2}$ e vale $F_{Max} = 15/(\sqrt{3}e)$ N.
- b) Studia la funzione $F(x)$ e dimostra che tale punto di massimo relativo è anche assoluto; disegna quindi il grafico G_F della funzione.
- c) Calcola l'energia potenziale associata alla forza.
- d) Calcola il lavoro che la forza compie per portare il punto materiale dalla posizione $x = 0$ all'infinito.
- e) Sia Γ_F il trapezoide individuato dalla superficie compresa tra G_F nella parte del grafico per cui $x \geq 0$, e l'asse delle x ; determina le coordinate del punto P appartenente a Γ_F tale che sia vertice del rettangolo di area massima di base l'asse delle x .

Per quanto possibile, utilizza Geogebra per la verifica grafica di quanto ottenuto.

10. Di seguito gli argomenti che dovranno essere sviluppati nell'elaborato.

• **Fisica**

Il candidato descriva dettagliatamente i principi fisici sui quali si basa il funzionamento dei motori elettrici.

• **Matematica**

Sia f_a la famiglia di funzioni definita da:

$$f_a(x) = at \cdot e^{1-t} \quad \text{con } a \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Durante un allenamento Mario, un atleta, ha corso con un andamento della velocità che può essere modellizzato con una funzione della famiglia f_a , quando $f(x)$ rappresenta la velocità istantanea in m/s ed x sia il tempo espresso in minuti.

- a) Della famiglia f_a , studia la funzione $f(x)$ per cui si ottiene che la massima velocità di $6 m/s$ sia raggiunta dopo un minuto e dimostra che tale funzione possiede un unico punto di massimo e un unico punto di flesso, quindi disegna il grafico G_f della funzione.

- b) Determina quanto spazio ha percorso Mario durante la prima ora di corsa.
- c) Sia Γ_f il trapezoide individuato dalla superficie compresa tra G_f e l'asse delle x per $0 \leq x \leq 60$; calcola il volume del solido di rotazione ottenuto facendo ruotare Γ_f intorno all'asse x .
- d) Determina le coordinate del punto P appartenente a Γ_f nel 1° quadrante e tale che sia vertice del rettangolo di area massima di base l'asse delle x .

Per quanto possibile, utilizza Geogebra per la verifica grafica di quanto ottenuto.

11. Di seguito gli argomenti che dovranno essere sviluppati nell'elaborato.

- **Fisica**

Il candidato descriva la Legge di Lenz ed il contesto fisico nel quale è stata introdotta, quindi ne descriva le connessioni con la legge di conservazione dell'energia.

- **Matematica**

Data la funzione:

$$f(x) = \frac{ax}{x^4 + b} \quad \text{con } x \geq 0.$$

- a) Determina a e b sapendo che il punto $A(1, 1)$ appartiene al grafico G_f di $f(x)$ e che $f(x)$ ha un massimo relativo in $x = 3^{\frac{1}{4}}$, quindi studia la funzione e disegna il grafico.
- b) Determina l'area della superficie compresa tra G_f e l'asse delle x .
- c) Determina le coordinate del punto P appartenente a G_f tale che sia un vertice del triangolo rettangolo di area massima di base sull'asse delle x e altro vertice nell'origine degli assi.

Per quanto possibile, utilizza Geogebra per la verifica grafica di quanto ottenuto.

12. Di seguito gli argomenti che dovranno essere sviluppati nell'elaborato.

- **Fisica**

Il candidato descriva dettagliatamente i principi fisici sui quali si basa il funzionamento degli interruttori differenziali.

- **Matematica**

Sia f_a la famiglia di funzioni definita da $f_a(x) = x^2 \cdot e^{ax}$ con $a \in \mathbb{R}$.

- a) Della famiglia f_a , studia la funzione $f(x)$ che ha un massimo per $x = 4$ e dimostra che tale punto di massimo relativo è anche l'unico; disegna quindi il grafico G_f della funzione.
- b) Sia Γ_f il trapezoide individuato dalla superficie compresa tra G_f e l'asse delle x per $0 \leq x \leq \infty$; calcola l'area di Γ_f ed il volume del solido di rotazione ottenuto facendo ruotare Γ_f intorno all'asse x .
- c) Determina le coordinate del punto P appartenente a Γ_f nel 1° quadrante e tale che sia vertice del rettangolo di area massima di base l'asse delle x .

Per quanto possibile, utilizza Geogebra per la verifica grafica di quanto ottenuto.

13. Di seguito gli argomenti che dovranno essere sviluppati nell'elaborato.

- **Fisica**

Il candidato descriva dettagliatamente i principi fisici sui quali si basa l'”effetto Hall” e come questo effetto determini il segno della carica dei portatori di carica in un conduttore.

- **Matematica**

Sia $f(x)$ la funzione primitiva di $g(x) = -x \cdot e^{-x}$ ed avente un asintoto orizzontale di equazione $x = 3$.

- a) Studia la funzione $f(x)$ e dimostra che la funzione possiede un unico punto di massimo e un unico punto di flesso, quindi disegna il grafico G_f della funzione.
- b) Sia Γ_f il trapezoide individuato dalla superficie compresa tra G_f e l'asse delle x per $0 \leq x \leq \infty$; calcola l'area di Γ_f ed il volume del solido di rotazione ottenuto facendo ruotare Γ_f intorno all'asse x .
- c) Determina le coordinate del punto P appartenente a Γ_f nel 1° quadrante e tale che sia vertice del rettangolo di area massima di base l'asse delle x .

Per quanto possibile, utilizza Geogebra per la verifica grafica di quanto ottenuto.

14. Di seguito gli argomenti che dovranno essere sviluppati nell'elaborato.

- **Fisica**

Il riciclo dei rifiuti previene lo spreco di materiali potenzialmente utili, garantisce maggiore sostenibilità al ciclo di produzione/utilizzazione dei materiali, riduce il consumo di materie prime, l'utilizzo di energia e da altri contributi anche economici a chi lo esegue correttamente. Il candidato descriva dettagliatamente i principi fisici sui quali si basa il funzionamento dei separatori elettromagnetici di materiali di riciclo.

- **Matematica**

Sia f_a la famiglia di funzioni definita da $f_a(x) = x^2 \cdot e^{ax} - 3$ con $a \in \mathbb{R}$.

- a) Della famiglia f_a , studia la funzione $f(x)$ che ha un massimo per $x = 6$ e dimostra che tale punto di massimo relativo è anche l'unico; disegna quindi il grafico G_f della funzione.
- b) Sia Γ_f il trapezoide individuato dalla superficie compresa tra G_f e l'asse delle x per $0 \leq x \leq \infty$; calcola l'area di Γ_f ed il volume del solido di rotazione ottenuto facendo ruotare Γ_f intorno all'asse x .
- c) Determina le coordinate del punto P appartenente a Γ_f nel 1° quadrante e tale che sia vertice del rettangolo di area massima di base l'asse delle x .

Per quanto possibile, utilizza Geogebra per la verifica grafica di quanto ottenuto.

15. Di seguito gli argomenti che dovranno essere sviluppati nell'elaborato.

- **Fisica**

Il candidato descriva dettagliatamente i principi fisici sui quali si basa il funzionamento dei pick-up elettrici.

- **Matematica**

Sia f_a la famiglia di funzioni definita da $f_a(x) = (ax - 1) \cdot e^{ax}$ con $a \in \mathbb{R} - \{0\}$.

- a) Della famiglia f_a , studia la funzione $f(x)$ che ha un flesso per $x = -1/2$, dimostra che la funzione possiede un unico punto di minimo e un unico punto di flesso, quindi disegna il grafico G_f della funzione.
- b) Sia Γ_f il trapezoide individuato dalla superficie compresa tra G_f nella parte del grafico per cui $f(x) \leq 0$, e l'asse delle x ; calcola l'area di Γ_f ed il volume del solido di rotazione ottenuto facendo ruotare Γ_f intorno all'asse x .

- c) Determina le coordinate del punto P appartenente a Γ_f nel 3° quadrante e tale che sia vertice del rettangolo di area massima di base l'asse delle x .

Per quanto possibile, utilizza Geogebra per la verifica grafica di quanto ottenuto.

16. Di seguito gli argomenti che dovranno essere sviluppati nell'elaborato.

- **Fisica** Il candidato descriva dettagliatamente i processi di carica e scarica di un condensatore in un circuito "RC".

- **Matematica**

Un punto materiale si muove lungo l'asse x sotto l'azione di una forza \vec{F} che dipende dalla posizione del punto secondo la legge

$$F(x) = ax \cdot e^{-\frac{x^2}{b^2}}$$

- Coerentemente con la grandezza fisica considerata, determina le unità di misura di a e b ed il loro valore sapendo che la forza è massima quando $x = 2\sqrt{2}$ e vale $4\sqrt{\frac{2}{e}}$ N.
- Studia la funzione $F(x)$ e dimostra che tale punto di massimo relativo è anche assoluto; disegna quindi il grafico G_F della funzione.
- Calcola l'energia potenziale associata alla forza.
- Calcola il lavoro che la forza compie per portare il punto materiale dalla posizione $x = 0$ all'infinito.
- Sia Γ_F il trapezoide individuato dalla superficie compresa tra G_F nella parte del grafico per cui $x \geq 0$, e l'asse delle x ; determina le coordinate del punto P appartenente a Γ_f tale che sia vertice del rettangolo di area massima di base l'asse delle x .

Per quanto possibile, utilizza Geogebra per la verifica grafica di quanto ottenuto.

17. Di seguito gli argomenti che dovranno essere sviluppati nell'elaborato.

- **Fisica** Il candidato descriva dettagliatamente il concetto di autoinduzione alla luce del quale descriva dettagliatamente l'andamento dell'intensità di corrente in un circuito "RL".

- **Matematica**

Sia f_a la famiglia di funzioni definita da $f_a(x) = (ax - 1) \cdot e^{ax}$ con $a \in \mathbb{R} - \{0\}$.

- Della famiglia f_a , il candidato studi la funzione $f(x)$ che ha un punto di flesso per $x = 1/3$, e dimostri che tale funzione possiede un unico punto di minimo e un unico punto di flesso, quindi disegni il grafico G_f della funzione.
- Sia Γ_f il trapezoide individuato dalla superficie compresa tra G_f nella parte del grafico per cui $f(x) \leq 0$, e l'asse delle x ; si calcoli l'area di Γ_f ed il volume del solido di rotazione ottenuto facendo ruotare Γ_f intorno all'asse x .
- Si determinino le coordinate del punto P appartenente a Γ_f nel 4° quadrante e tale che sia vertice del rettangolo di area massima di base l'asse delle x .

Per quanto possibile, si utilizzi Geogebra per la verifica grafica di quanto ottenuto.